8. 试求所有的有限项数列 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$，满足：每个 $x_j(0 \leqslant j \leqslant n)$ 都等于 j 在数列中出现的次数.

解：由题意 $x_0+x_1+\cdots+x_n=0\cdot x_0+1\cdot x_1+\cdots+nx_n=n+1$

易知 $x_0 \geqslant 1$

$\because x_1, \cdots, x_n$ 中有 x_0 个 0

$\therefore x_1+\cdots+x_n \geqslant n-x_0$

$\therefore n \leqslant x_0+x_1+\cdots+x_n \leqslant n+1$

$\therefore x_1+\cdots+x_n$ 中的非零项为 1 个 2，其余均为 1

① $x_0=1$ 则 $x_1, \cdots, x_n$ 中为 1 个 0，1 个 2，$n-2$ 个 1

$\therefore x_1=n-1, x_2=1$

$\therefore \begin{cases} n-1 \leq 2 \\ n-2 \geqslant 1 \end{cases}$

$\therefore n=3$

$\therefore (x_0, x_1, x_2, x_3)=(1,2,1,0)$

② $x_2 \geqslant 2$ 则 $x_2=2$，$x_0=2$

$\therefore x_1, \cdots, x_n$ 中为 1 个 2，2 个 0，$n-3$ 个 1

$\therefore x_1=n-3$

$\therefore x_0+x_1+x_2=n+1$

$\therefore x_3=x_4=\cdots=x_n=0$

$\therefore n \leq 4$

I：$n=3$ 则 $(x_0, x_1, x_2, x_3)=(2,0,2,0)$

II：$n=4$ 则 $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)=(2,1,2,0,0)$

③ $x_0 \geqslant 2$，$x_2=1$

$\because x_1, \cdots, x_n$ 中非零项为 1 个 2，$n-1-x_0$ 个 1

$\therefore x_0 \geqslant 3$，$x_1=n-1-x_0$

$\because x_2=1$

$\therefore x_1=n-1-x_0=2$

$\therefore x_0=n-3$

此时 $x_0+x_1+x_2=n$

$\therefore x_3, x_4, \cdots, x_n$ 中有 1 个 1

$\therefore n-3 \geqslant 3$ 且 $x_{n-3}=1$

$\therefore$ 此时 $n \geqslant 6$，$(x_0, x_1, \cdots, x_n)=(n-3,2,1,0,\cdots,0,1,0,0,0)$



第十讲

数列中的构造与证明

知识板块

本讲介绍若干数列的构造问题，同时对数列整个板块做一个总结 .

例题精讲

1. 设 $\{a_n\}$ 是正数数列，证明：存在无穷多个 $n\in \mathrm{N}_+$，使得 $\dfrac{a_1+a_{n+1}}{a_n}>1+\dfrac{1}{n}$.

证明：假设只有有限个

则 $\exists m$ 使得 $n\geqslant M$ 时有 $\dfrac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$

$\because a_n>0$

$\therefore a_{n+1}\leqslant \dfrac{n+1}{n}a_n-a_1$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}<\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_1}{n+1}$

$\therefore \dfrac{a_n}{n}\leqslant \dfrac{a_m}{m}-\left(\dfrac{a_1}{m+1}+\cdots+\dfrac{a_1}{n}\right)$

$\because \dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ 关于 n 发散，$a_1>0$

$\therefore \exists n\geqslant M$ 使得 $\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\dfrac{a_m}{ma_1}$

$\therefore$ 此时 $\dfrac{a_n}{n}<0$

与 a_n 为正数矛盾

$\therefore$ 命题成立

2．是否存在一个无穷正实数数列 a_1，a_2，a_3，…，对于任意的正整数 n，同时满足：

① $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n^2$；② $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\leqslant 2008$．

用于：∵ $a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k}\leqslant a_{1+\cdots}+a_{2^k}\leqslant(2^k)^2=2^{2k}$

∴ $\dfrac{1}{a_{2^{k-1}+1}}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2^k}}\geqslant\dfrac{(2^{k-1})^2}{a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k}}\geqslant\dfrac{2^{2k-2}}{2^{2k}}=\dfrac{1}{4}$

∴ $2008\geqslant\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2^k}}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+(\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4})+\cdots+(\dfrac{1}{a_{2^{k-1}+1}}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2^k}})$

$\geqslant 1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{4}$

$=1+\dfrac{k}{4}$

取 $k>4\times2007$ 则矛盾

∴不存在

3．证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\dfrac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+\cdots$．

证明：设 $f(x)=2x^3+5x-2$

则 $f'(x)=6x^2+5>0$

∴ $f(x)$ 在 R 上单调递增

∵ $f(0)=-2<0$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-2=\frac{3}{4}>0$

∴ $f(x)=0$ 有唯一实根 r，且 $0<r<\frac{1}{2}$

∵ $2r^3+5r-2=0$

∴ $\dfrac{2}{5}=\dfrac{r}{1-r^3}=r+r^4+r^7+\cdots$

∴ $a_n=3n-2$ 为一组符合题意的数列

假设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均满足题意

则 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+\cdots$

去掉重复项后有

$r^{s_1}+r^{s_2}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+\cdots$

不妨设 $s_1<t_1$

则 $r^{t_1}+r^{t_2}+\cdots\leqslant r^{t_1}+r^{t_1+1}+\cdots$

$=r^{t_1}\cdot\dfrac{1}{1-r}$

$<r^{t_1}\cdot\dfrac{1}{r}$

$=r^{t_1-1}$

$\leqslant r^{s_1}$

$\leqslant r^{s_1}+r^{s_2}+\cdots$ 矛盾

综上，命题成立

4. 如果 $a_i + a_k \neq 2a_j$ 对任意 $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ 均成立，那么数列 a_1，a_2，…，a_n 就称为无平均数的 . 证明：任意 n 个不同的整数均可排成无平均数的数列 .

证明：对n归纳证明

$n \leqslant 3$ 时命题显然成立

假设 $n \leqslant k$ 时命题成立

$n = k+1$ 时 若数列中不是即有奇数又有偶数

① 所有数均为奇数

则将所有数加1再除以2

② 所有数均为偶数

则将所有数除以2

易知上述操作不改变结论

∵ 上述操作下，在所有数绝对值不为1时

绝对值最大值严格减小

∴ 在有限步操作后，一定有既有奇数又有偶数

则由归纳假设，可将所有奇数排列为无平均数，所有偶数排列为无平均数

再将两个排列首尾相接即可

∴ 命题成立

5. 设 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$ 为一个非负整数数列，且对任意的正整数 n，满足 $a_n \geqslant a_{2n} + a_{2n+1}$.

（1）证明：对任意的正整数 m，可以在数列中找到 m 个连续的 0；

证明：记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

则 $S_{2^n-1} = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = a_1 + \sum_{k=1}^{2^n-1} (a_{2k} + a_{2k+1}) \leqslant a_1 + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k = a_1 + S_{2^{n-1}}$

∴ $a_1 \geqslant \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} a_k$

∴ $2^{n-1} \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ 时至多有 a_1 个非零项

对 $\forall m \in \mathbb{Z}^+$，取 n 使得 $2^{n-1} - a_1 \geqslant (a_1+1)m$

∵ a_1 个非零项至多将 $2^{n-1} \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ 分为 a_1+1 段

∴ 其中至少有一段中有至少 m 个0 ∴ 成立

（2）试构造一个满足条件且存在无穷多个非 0 项的数列 .

解：令 $a_{2^k} = 1$ $(k \in \mathbb{N})$，其余为0

则 当 $n = 2^k$ 时有 $a_{2^k} = 1 \geqslant 1+0 = a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}}$

当 $n \neq 2^k$ 时有 $a_n = 0 \geqslant 0+0 = a_{2n} + a_{2n+1}$

6. 给定大于 1 的正整数 n，是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数，同时满足以下两个条件：

① $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$；② $n-1-\dfrac{1}{1998}<\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i-b_i}{a_i+b_i}<n-1$.

请说明理由.

解：设 $a_k=2Mi$，$b_k=2i$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$

$a_n=(M-1)^2n(n-1)$　$b_n=M\cdot(M-1)n\cdot(n-1)$

其中 $M>8000n\in\mathbf{Z}^+$

则 $a_1+\cdots+a_n=2M(1+2+\cdots+n-1)+(M-1)^2n(n-1)$

$=M\cdot n(n-1)+(M-1)^2\cdot n(n-1)$

$=(M^2-M+1)n(n-1)$

$b_1+\cdots+b_n=2(1+2+\cdots+n-1)+M(M-1)n\cdot(n-1)$

$=n(n-1)+M(M-1)n(n-1)$

$=(M^2-M+1)n(n-1)$

① 成立

$\because\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=(n-1)\cdot\dfrac{M-1}{M+1}-\dfrac{1}{2M-1}$

$=n-1-\dfrac{2(n-1)}{M+1}-\dfrac{1}{2M-1}<n-1$

$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=n-1-\dfrac{2(n-1)}{M+1}-\dfrac{1}{2M-1}$

$>n-1-\dfrac{n-1}{4000n}-\dfrac{1}{8000n}$

$>n-1-\dfrac{1}{4000}-\dfrac{1}{4000}$

$>n-1-\dfrac{1}{1998}$

$\therefore$ ② 成立

综上，存在

7. 设 $a_k>0(k=1,2,\cdots,2008)$. 证明：

当且仅当 $\sum_{k=1}^{2008}a_k>1$ 时，存在数列 $\{x_n\}$ 满足以下条件：

① $0=x_0<x_n<x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$；　② $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在；

③ $x_n-x_{n-1}=\sum_{k=1}^{2008}a_kx_{n+k}-\sum_{k=0}^{2007}a_{k+1}x_{n+k}(n=1,2,\cdots)$.

证明：首先证明 ①，②，③ 成立时 $\sum_{k=1}^{2008}a_k>1$

$\because x_n-x_{n-1}=\sum_{k=1}^{2008}a_kx_{n+k}-\sum_{k=0}^{2007}a_{k+1}x_{n+k}$

$=\sum_{k=1}^{2008}a_kx_{n+k}-\sum_{k=1}^{2008}a_kx_{n+k-1}$

$=\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot(x_{n+k}-x_{n+k-1})$

$\therefore\sum_{n=1}^{m}(x_n-x_{n-1})=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{2008}a_k(x_{n+k}-x_{n+k-1})$

$\therefore x_m-x_0=\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot\sum_{n=1}^{m}(x_{n+k}-x_k)$

$=\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot(x_{k+m}-x_k)$

$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

$\therefore$ 记 $X=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$\therefore\lim\limits_{m\to\infty}(x_m-x_0)=\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot(x_{k+m}-x_k)$

$=\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot(\lim\limits_{m\to\infty}x_{k+m}-x_k)$

$\therefore X=\sum_{k=1}^{2008}a_k(X-x_k)$

$\because X\geqslant x_{2008}\geqslant x_k>0$

$\therefore X\leqslant\sum_{k=1}^{2008}a_k(X-x_{2008})$

$\therefore\sum_{k=1}^{2008}a_k\geqslant\dfrac{X}{X-x_{2008}}>1$ 成立

下面给出 $\sum_{k=1}^{2008}a_k>1$ 时 $\{x_n\}$ 的构造

考虑 $f(x)=\sum_{k=1}^{2008}a_kx^k-1$

易知 $f(x)$ 单调递增

$\because f(0)=-1<0$　$f(1)=\sum_{k=1}^{2008}a_k-1>0$

$\therefore\exists\ 0<r<1$ 使得 $f(r)=0$

令 $x_n=r+r^2+\cdots+r^n$ $(n\geqslant1)$　$x_0=0$

则易知 ① 成立

$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}r+r^2+\cdots+r^n=\lim\limits_{n\to\infty}r\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r}=\dfrac{r}{1-r}$

$\therefore$ ② 成立

$\because x_n-x_{n-1}=r^n=\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot r^{n+k}$

$=\sum_{k=1}^{2008}a_k\cdot(x_{n+k}-x_{n+k-1})$

$=\sum_{k=1}^{2008}a_kx_{n+k}-\sum_{k=0}^{2007}a_{k+1}x_{n+k}$

$\therefore$ ③ 成立

综上，命题成立

8．设无穷数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_0=1$，$0<x_{n+1}\leqslant x_n(n=0,1,2,\cdots)$．

（1）证明：存在正整数 m，使得 $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{m-1}^2}{x_m}\geqslant 3.999$；

证明：若 $x_1+x_2+\cdots+x_n<2$ 恒成立

则取 $m\geq 4000$

$\because \left(\frac{x_0^2}{x_1}+\cdots+\frac{x_{m-1}^2}{x_m}\right)(x_1+\cdots+x_m)\geq(x_0+\cdots+x_{m-1})^2$

$\therefore \frac{x_0^2}{x_1}+\cdots+\frac{x_{m-1}^2}{x_m}\geq\frac{(1+x_1+\cdots+x_{m-1})^2}{x_1+\cdots+x_m}\geq\frac{(1+x_1+\cdots+x_{m-1})^2}{\frac{m}{m-1}(x_1+\cdots+x_{m-1})}\geq\frac{4(m-1)}{m}=4-\frac{4}{m}\geq 4-\frac{1}{1000}=3.999$ 成立

否则 $\exists m$ 使得 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-2}\geq 2$

$\because \frac{(x_0-x_1)^2}{x_1}+\cdots+\frac{(x_{m-1}-x_m)^2}{x_m}=\frac{x_0^2}{x_1}+\cdots+\frac{x_{m-1}^2}{x_m}-2(x_0+\cdots+x_{m-1})+(x_1+\cdots+x_m)\geq 0$

$\therefore \frac{x_0^2}{x_1}+\cdots+\frac{x_{m-1}^2}{x_m}\geq 2(x_0+\cdots+x_{m-1})-(x_1+\cdots+x_m)$

$=2x_0+(x_1+\cdots+x_{m-1})-x_m$

$\geq 2+x_1+\cdots+x_{m-2}$

≥ 4

≥ 3.999 成立

综上，命题成立

（2）试构造一个满足条件的数列，使得对任意正整数 n，都有 $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$．

解：取 $x_0=1$，$x_k=\frac{1}{2^k}\ (k\geq 1)$

则 $\frac{x_0^2}{x_1}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k-1}^2}{x_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^{2k-2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-2}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}<4$，成立